# Keine Ahnung: Lage von Punkten

Lage von
Punkten

*Methodenwissen*
*für die Rechenpraxis*

***Datei Nr. 63215***

***22. November 2020***


**Friedrich W. Buckel**

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

# Vorwort

In vielen Aufgabenstellungen muss man überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden oder in einer Ebene liegt. Fast alle Schüler erledigen dies durch eine Punktprobe, indem sie den Ortsvektor des gegebenen Punktes in die Gleichung des Trägers einsetzen.

Dies ist vor allem bei Ebenen eine etwas umständliche Methode.

Ich zeige hier mehrere Grundaufgaben und neben dieser (für mich schlechten) Punktprobenmethode Die elegantere und meistens kürzere Lösung des Vektorenvergleichs.

Es geht dabei einfach darum, herauszufinden, ob der Vektor vom Aufpunkt zum gegebenen Punkt dieselbe Richtung hat wie der Richtungsvektor einer Geraden oder ob er komplanar zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene ist.

Schüler sollten dies lernen, wenn ihre Lehrer ihnen diese echte „Vektormethode“ nicht zeigen.

# Inhalt

# Problem 1: Liegt ein Punkt auf einer Geraden?

**Aufgabe**

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$

sowie die Punkte $P(6\,|\,7\,|\,-4)$ und $Q(1\,|\,-3\,|\,0)$.

Liegen die Punkte P und Q auf g?

Es gibt prinzipiell zwei verschiedene Lösungsverfahren.

Das erste nennt man auch die **Punktprobe**. Dazu setzt man den Ortsvektor des in Frage kommenden Punktes in die Geradengleichung ein und versucht, einen passenden r-Wert zu finden.

Das zweite ist eine raffinierte und doch einfache Vektorüberlegung, wobei man die Richtung sucht, in der jeder Punkt von A aus liegt. Diese Methode geht am schnellsten.

### 1. Lösungsmethode: Punktprobe machen

Punktprobe mit $P(6\,|\,7\,|\,-4)$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \iff \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung wird mit $r = \frac{3}{2}$ gelöst.

Ergebnis: $P \in g$

Punktprobe mit $Q(1\,|\,-3\,|\,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

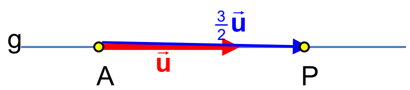
Es gibt kein passendes r für die Gleichung.

Ergebnis: $Q \notin g$

### 2. Lösungsmethode: Vektoren vergleichen

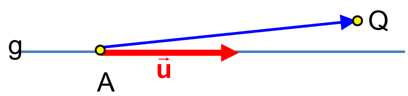
Richtung $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Da $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2} \cdot \vec{u}$ ist, liegt P auf g.




Richtung $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da $\overrightarrow{AQ} \neq k \cdot \vec{u}$ liegt Q nicht auf g.




# Problem 2: Liegt ein Punkt auf einer Strecke?

**Aufgabe:** Gegeben sind drei Punkte $A(1\,|\,4\,|\,-3)$, $B(7\,|\,-8\,|\,3)$ und $C(3\,|\,0\,|\,-1)$
Liegt C auf der Strecke AB?

**Lösungsmethode: Vektoren vergleichen:**


$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ vergleichen mit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$ liegt C auf der Strecke AB

und teilt diese im Verhältnis 1: 2: (C liegt zwischen A und B, weil $\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $0 < r < 1$.)

## Problem 3: Bilden drei Punkte ein Dreieck? Liegen drei Punkte auf einer Geraden?

Beide Aufgaben verwenden dasselbe Lösungsverfahren, sind also im Grund gleichwertig:
Wenn nämlich drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, dann bilden sie ein Dreieck!

**Aufgabe:** Gegeben sind drei Punkte. Bilden sie ein Dreieck oder liegen sie auf einer Geraden?

a) $A(-3\,|\,2\,|\,8)$, $B(7\,|\,7\,|\,-7)$ und $C(-1\,|\,3\,|\,5)$. b) $A(3\,|\,2\,|\,1)$, $B(-2\,|\,7\,|\,1)$ und $C(-1\,|\,2\,|\,3)$

**Lösungsmethode: Vektoren vergleichen:**

a) $$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} = 5 \cdot \overrightarrow{AC}$ ist

(also $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches von $\overrightarrow{AC}$ ist)

liegt C auf der Geraden AB.

(Man kann sogar noch mehr sagen:
C liegt zwischen A und B und teilt
AB im Verhältnis 1:4.)

b) $$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$, sind die Vektoren

$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht kollinear. A, B und C

liegen nicht auf einer Geraden.

A, B und C bilden also ein Dreieck.

# Problem 4: Liegt ein Punkt in einer Ebene?

Grundwissen: Wenn die Ebene durch diese Gleichung gegeben ist: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ , dann ist $\vec{a}$ der Stützvektor der Ebene, also der Ortsvektor des Aufpunktes A,

Liegt P in der Ebene, dann ist $\overrightarrow{AP}$ eine Linearkombination der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ .

In der Abbildung ist $\overrightarrow{AP} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$. $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ sind also komplanar.

Für einen nicht in E liegenden Punkt Q gibt es eine solche Linearkombination nicht.

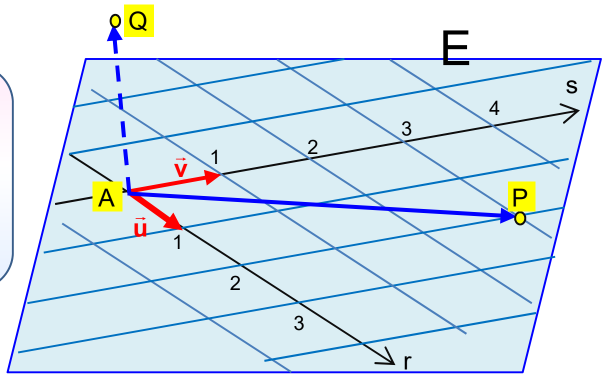
Um nachzuweisen, dass P in E liegt, reicht es bereits, wenn man nachweist, dass die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar sind. Wenn ihre Determinante =0 ist, dann ist das so und $P \in E$

**Aufgabe:**

Gegeben sind E: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

und die Punkte $P(0\,|\,7\,|\,3)$ und $Q(0\,|\,7\,|\,-1)$ .

Liegen P und Q in E?




## 1. Lösung durch Vektorenvergleich

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AP}\ \ \vec{u}\ \ \vec{v}\right| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \ldots \boxed{= 0}$

also sind $\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}$ komplanar,

d. h. P liegt in E.

$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AQ}\ \ \vec{u}\ \ \vec{v}\right| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \ldots \boxed{\neq 0}$

also sind $\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}$ <u>nicht</u> komplanar,

d. h. Q liegt <u>nicht</u> in E-

## 2. Lösung durch eine Punktprobe

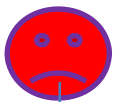
$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

d. h. $\left\{\begin{matrix} -1 = -r \\ 3 = -r + 2s \\ 7 = 5r + s \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

r = 1 in (2): $3 = -1 + 2s \Rightarrow s = 2$

Probe in (3): $7 = 5 + 2$

Wahre Aussage, d. h. $P \in E$ .



$\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

d. h. $\left\{\begin{matrix} -1 = -r \\ 3 = -r + 2s \\ 3 = 5r + s \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$

r = 1 in (2): $3 = -1 + 2s \Rightarrow s = 2$

Probe in (3): $3 = 5 + 2$

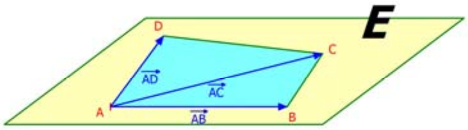
Falsche Aussage, d. h. $Q \notin E$ .

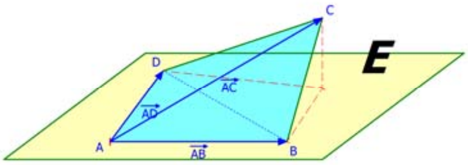
*Ohne Probe wäre das Ergebnis falsch!*

*Man erkennt: Die Methode „Vektorenvergleich“ ist kürzer.*

# Problem 5: Liegen vier Punkte in einer Ebene?

**Beispiel:** Ist $A(-8|-3|6)$, $B(4|5|-10)$, $C(10|6|-3)$, $D(-4|24|-1)$ ein ebenes Viereck?




Die linke Abbildung zeigt ein in der Ebene E liegendes Viereck ABCD.

*Das Viereck ABCD ist eben:* *Also sind die drei Vektoren* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *komplanar.*

*Umgekehrt gilt:* *Weil diese Vektoren komplanar sind, ist das Viereck ABCD eben.*

Die rechte Abbildung zeigt ein nicht-ebenes Viereck ABCD.
Das Teildreieck ABD liegt in E, die Ecke C aber nicht. (Sie wurde „nach oben gezogen".)

*Das Viereck ABCD ist nicht eben:* *Die Vektoren* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *sind nicht komplanar.*

*Umgekehrt: Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, ist das Viereck ABCD nicht eben.*

Wir benötigen für unsere Untersuchung die Umkehrung.

**Also vergleichen wir diese drei Vektoren mit einer Determinante:**

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 4 \\ 8 & 9 & 27 \\ -16 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 27 \\ -4 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{matrix}$$

Ich habe aus der 1. Spalte die 4 ausgeklammert und aus der 2. Spalte die 9.
(Bei der Linearen Abhängigkeit kommt es nicht auf die Länge der Vektoren an!)

$$= 36 \cdot \left[-21 - 216 - 8 - (-16 - 91 - 28)\right] = 36 \cdot [-245 + 135] \neq 0$$

Weil diese Determinante ungleich 0 ist, sind diese drei Vektoren linear unabhängig (nicht komplanar).

Die Pfeile $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ liegen also nicht alle drei in der Ebene E:

Das Viereck ist nicht eben!

# Problem 6: Liegt ein Punkt in einem Parallelogramm

*Hier nur die Methode.*

*Viele Beispiele stehen in den Texten 63220 und in 63250*

**Aufgabe:** Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD und ein Punkt P.
Liegt P im Parallelogramm?

## Lösungsmethode.

Das Parallelogramm ABCD definiert eine Ebene E, wobei man $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ als Richtungsvektoren nehmen kann, A wird zum Aufpunkt.

Nun rechnet man nach, ob P in der Ebene liegt, indem man überprüft, ob sich $\overrightarrow{AP}$ als Linearkombination durch $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen lässt.

Der Ansatz lautet $\overrightarrow{AP} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$. Aus den Werten von r und s lässt sich das folgern:

Wenn r und s Zahlen im Bereich 0 und 1 sind (also $r,s \in [\,0;1\,]$),
dann liegt der Punkt im bzw. auf dem Parallelogramm.
Wenn r und s Zahlen zwischen 0 und 1 sind (also $r,s \in \,]\,0;1\,[\,$),
dann liegt der Punkt im Innern des Parallelogramms.
Wenn $0 \le r \le 1$ und s = 0, dann liegt der Punkt auf der Strecke AB.
Wenn $0 \le r \le 1$ und s = 1, dann liegt der Punkt auf der Strecke DC.
Wenn r = 0 und $0 \le s \le 1$, dann liegt der Punkt auf der Strecke AD.
Wenn r = 1 und $0 \le s \le 1$, dann liegt der Punkt auf der Strecke BC.
Und vieles andere mehr…

In der Abbildung ist $\overrightarrow{AP} = 0{,}6 \cdot \vec{u} + \frac{2}{3} \cdot \vec{v}$, also liegt P im Innern des Parallelogramms